Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando EDP e lógica fuzzy

Luciana Takata Gomes

Bolsista CAPES

Departamento de Matemática Aplicada - IMECC - UNICAMP

Campinas - SP

3 de abril de 2009

Modelagem Matemática

Hipótese:

- Tem por objetivo representar matematicamente um fenômeno;
- Não existe perfeição;
- Quanto mais variáveis, mais complicado.

Modelo de Malthus

Hipótese:

- A população cresce proporcionalmente à quantidade existente de indivíduos.

$$\frac{dP}{dt} = cP$$

Modelo de Verhulst

Hipótese:

- O meio ambiente suporta uma densidade populacional máxima K.

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

Modelo SIR

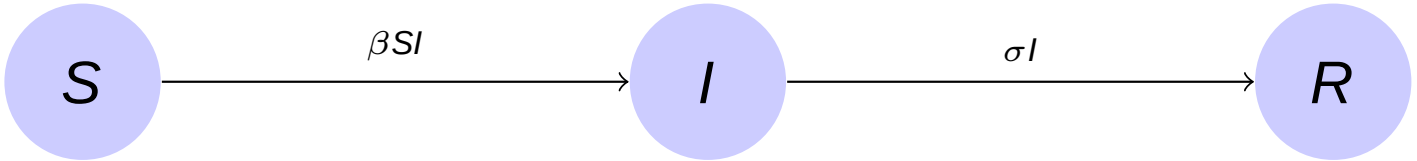
Hipótese:

- Cada indivíduo pertence a um e a apenas um dos compartimentos populacionais;
- A taxa de contaminação da população de suscetíveis é proporcional à quantidade provável de encontros entre suscetíveis e infectantes;
- Tempo curto para se considerar natalidade e mortalidade;
- Após $1/\sigma$ unidades de tempo infectado, cada indivíduo passa ao compartimento de recuperados.

Modelo SIR

Hipótese:

- Cada indivíduo pertence a um e a apenas um dos compartimentos populacionais;
- A taxa de contaminação da população de suscetíveis é proporcional à quantidade provável de encontros entre suscetíveis e infectantes;
- Tempo curto para se considerar natalidade e mortalidade;
- Após $1/\sigma$ unidades de tempo infectado, cada indivíduo passa ao compartimento de recuperados.



Modelo SIR

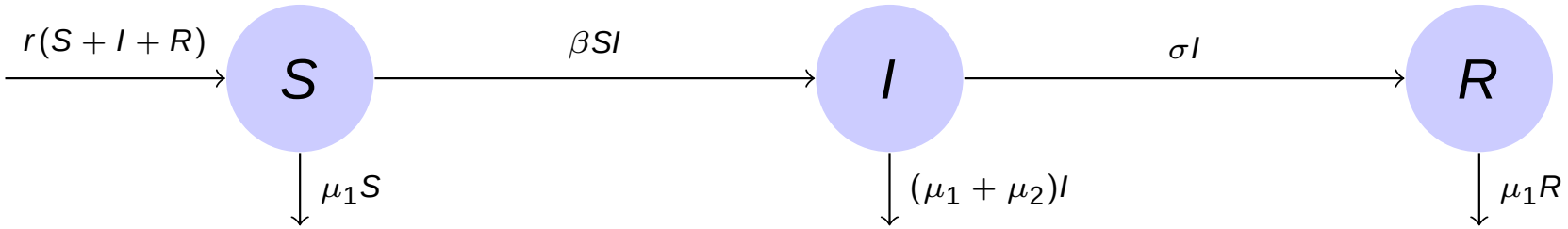
$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \sigma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \sigma I \end{cases}$$

Modelo SIR com dinâmica vital

Hipóteses: mesmas do SIR anterior, exceto pela presença de dinâmica vital (o tempo não é tão curto).

Modelo SIR com dinâmica vital

Hipóteses: mesmas do SIR anterior, exceto pela presença de dinâmica vital (o tempo não é tão curto).



Modelo SIR com dinâmica vital

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= -\beta SI + r(S+I+R) - \mu_1 S \\ \dfrac{dI}{dt} &= \beta SI - \sigma I - (\mu_1 + \mu_2) I \\ \dfrac{dR}{dt} &= \sigma I - \mu_1 R \end{cases}$$

Hipóteses para os modelos da dengue

- População humana dividida em três compartimentos;
- Infecção de humanos variando de acordo com quantidade de mosquitos;
- População humana sem dinâmica vital.

Hipóteses para o modelo 1 da dengue

- População de mosquitos com dinâmica vital Malthusiana;
- Uma porcentagem da população de mosquitos é infectada.

Modelo 1 da dengue

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} - div(\alpha_M \nabla M) = rM \\ \dfrac{dS}{dt} - div(\alpha_H \nabla S) = -\beta SM \\ \dfrac{dI}{dt} - div(\alpha_H \nabla I) = \beta SM - \sigma I \\ \dfrac{dR}{dt} - div(\alpha_H \nabla R) = \sigma I \end{cases}$$

Hipóteses para o modelo 2 da dengue

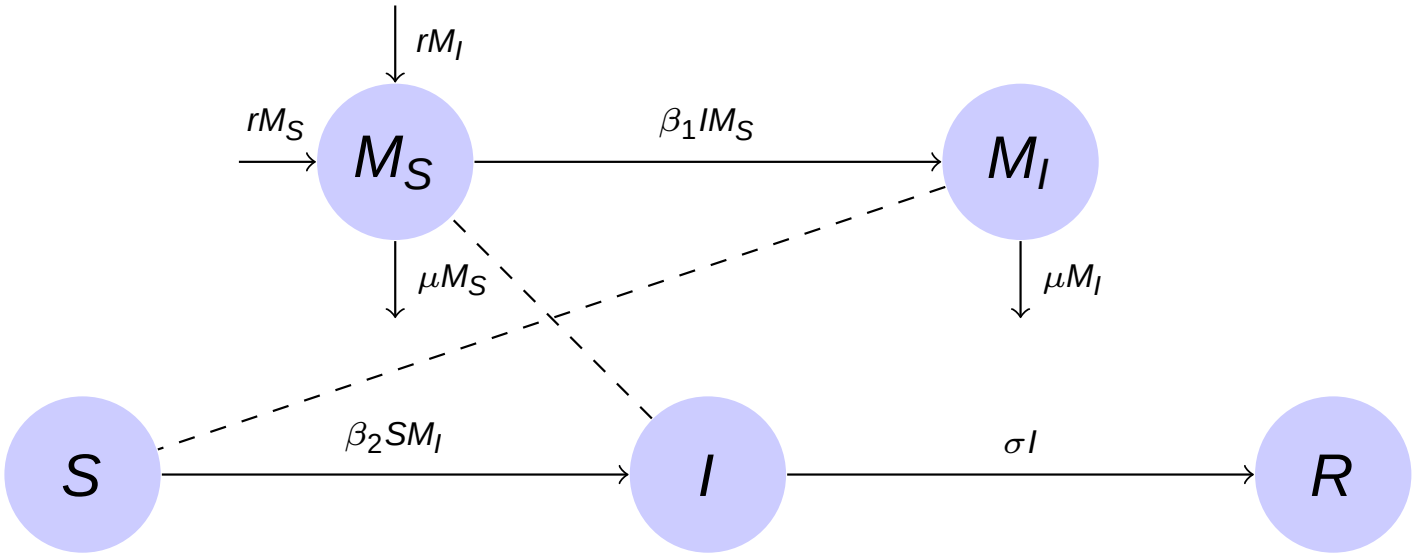
- Há separação da população de mosquito entre suscetíveis e infectantes;
- População de mosquitos com dinâmica vital Malthusiana;
- Humanos infectantes transmitem o vírus a mosquitos suscetíveis;
- Mosquitos infectantes e suscetíveis geram mosquitos suscetíveis.

Compartimentos do modelo 2 da dengue

S: densidade de humanos suscetíveis; I: densidade de humanos infectados; R: densidade de humanos recuperados; M_S: densidade de mosquitos suscetíveis; M_I: densidade de mosquitos infectados.

Compartimentos do modelo 2 da dengue

S: densidade de humanos suscetíveis; I: densidade de humanos infectados; R: densidade de humanos recuperados; M_S: densidade de mosquitos suscetíveis; M_I: densidade de mosquitos infectados.



Modelo 2 da dengue

$$\begin{cases} \dfrac{dM_S}{dt} - div(\alpha_{M_S}\nabla M_S) &= r(M_S + M_I) - \mu M_S - \beta_1 M_S I \\ \dfrac{dM_I}{dt} - div(\alpha_{M_I}\nabla M_I) &= -\mu M_I + \beta_1 M_S I \\ \dfrac{dS}{dt} - div(\alpha_H \nabla S) &= -\beta_2 S M_I \\ \dfrac{dI}{dt} - div(\alpha_H \nabla I) &= \beta_2 S M_I - \sigma I \\ \dfrac{dR}{dt} - div(\alpha_H \nabla R) &= \sigma I \end{cases}$$

Hipóteses para o modelo 3 da dengue

- 3 compartimentos para as populações de mosquito: alados suscetíveis, alados infectantes e aquáticos;
- Capacidade de suporte para as populações de mosquitos;
- Humanos infectantes transmitem o vírus a mosquitos suscetíveis;
- Mosquitos alados suscetíveis e infectantes geram mosquitos aquáticos;
- Mosquitos aquáticos geram mosquitos alados suscetíveis.

Modelo 3 da dengue

$$\begin{cases} \frac{dM_S}{dt} - div(\alpha_{M_S}\nabla M_S) &= \gamma A\left(1-\frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M_S - \beta_1 M_S I \\ \frac{dM_I}{dt} - div(\alpha_{M_I}\nabla M_I) &= -\mu M_I + \beta_1 M_S I \\ \frac{dA}{dt} &= r\left(1-\frac{A}{k_2}\right)M - \mu_2 A - \gamma A \\ \frac{dS}{dt} - div(\alpha_H \nabla S) &= -\beta_2 S M_I \\ \frac{dI}{dt} - div(\alpha_H \nabla I) &= \beta_2 S M_I - \sigma I \\ \frac{dR}{dt} - div(\alpha_H \nabla R) &= \sigma I \end{cases}$$

Parâmertos fuzzy

Alguns parâmetros podem ser definidos através de bases de regras. Por exemplo, a taxa de nascimento de mosquitos varia de acordo com presença de recipientes e água. Podem ser escritas regras do tipo:

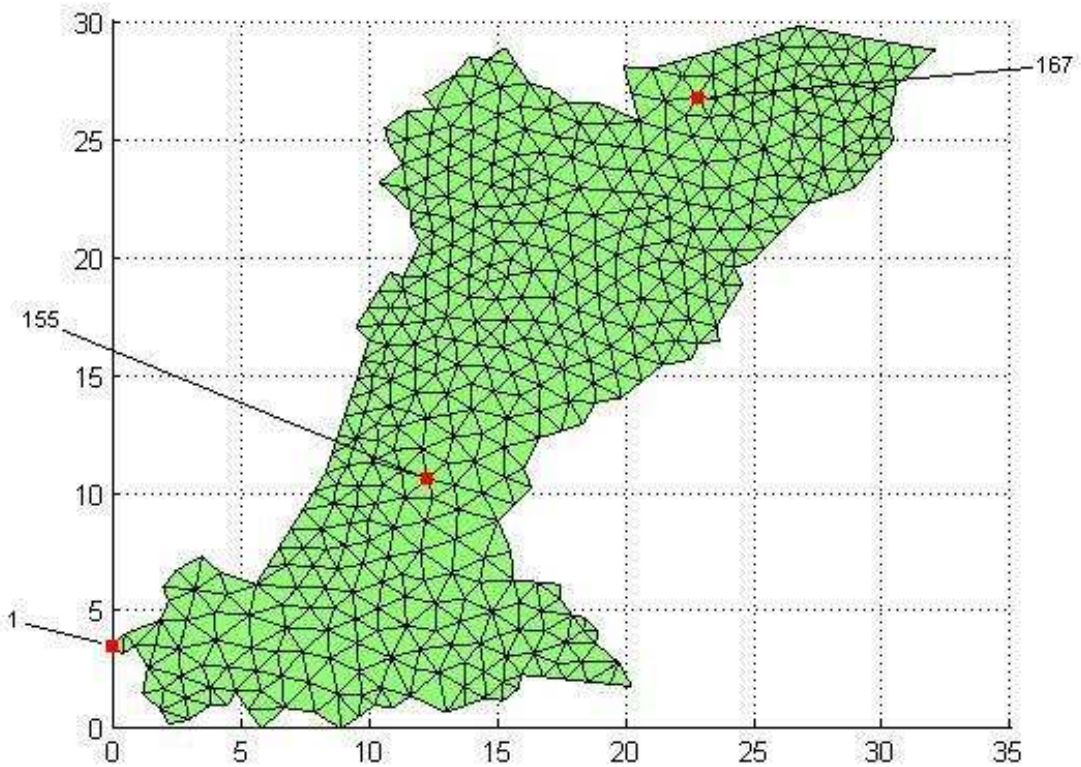
- Se há muitos recipientes e muita chuva a taxa de nascimento r é alta;
- Se há poucos recipientes e pouca chuva a taxa de nascimento r é baixa.

Método numérico

- Discretização espacial: Método dos Elementos Finitos
- Discretização temporal: Método de Crank-Nicolson

Malha

A discretização do domínio forneceu uma malha de 497 pontos.



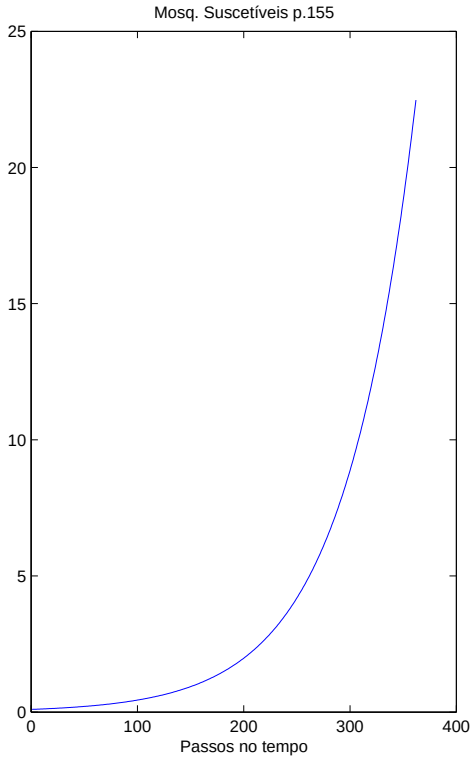
Condições iniciais

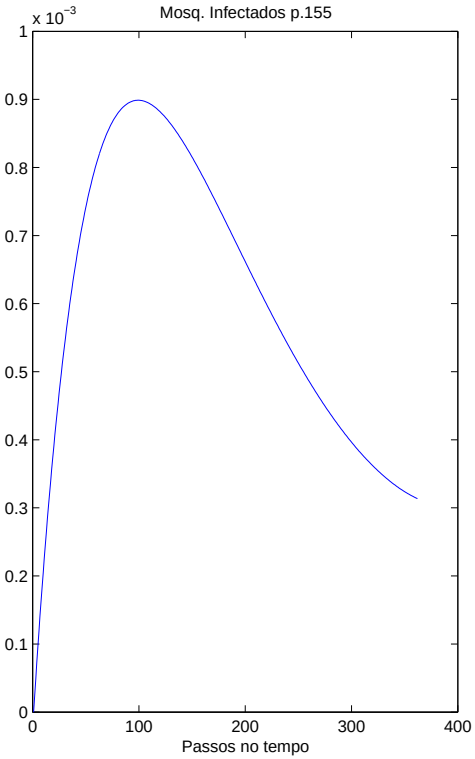
- A densidade de mosquitos suscetíveis é constante ($M_S = 0.1$) ao longo da malha, exceto quando $x^2 + y^2 < 25$ ($M_S = 5$).
- A densidade de mosquitos infectados é constante ($M_I = 0$) ao longo da malha.
- A densidade de humanos suscetíveis é constante ($S = 60$) ao longo da malha.
- A densidade de humanos infectados é constante ($I = 0$) ao longo da malha, exceto no ponto 155 ($I = 1$).
- A densidade de humanos recuperados é constante ($R = 0$) ao longo da malha.

Parâmetros

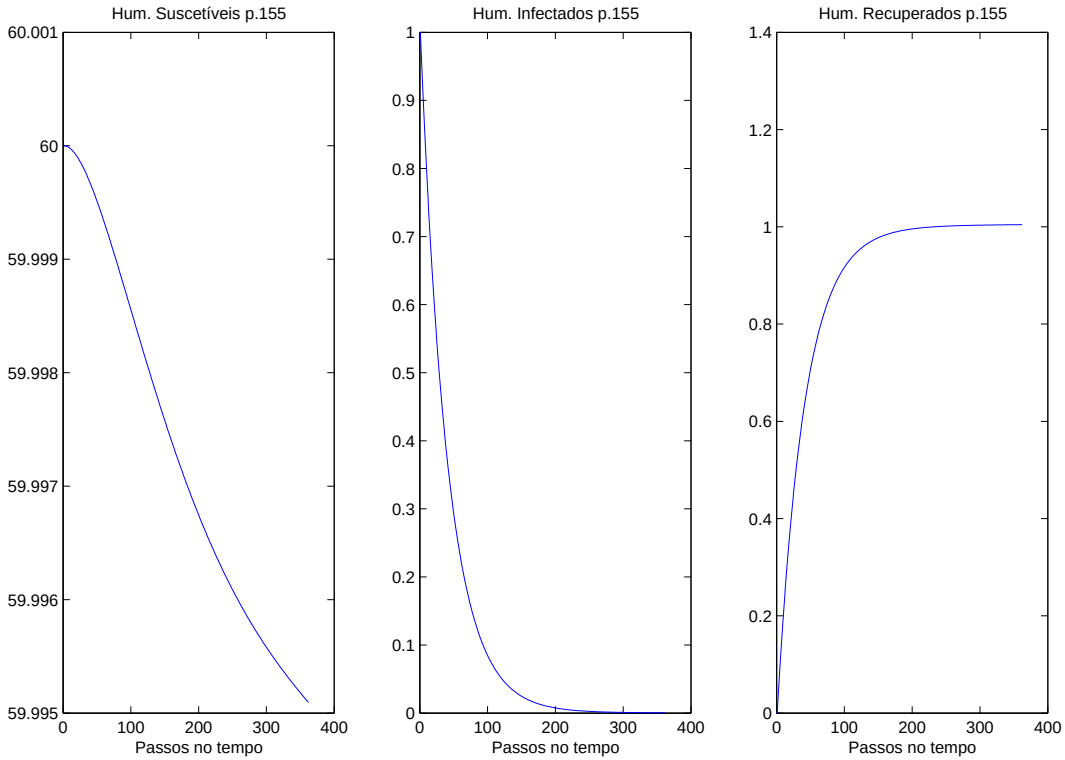
- $\alpha_M = 0.0001$ e, para os humanos, $\alpha = 0$;
- $m = 0.04$; $n = 0.1$;
- $\beta = 0.0015$; $\rho = 0.001$; $\sigma = 0.1$;
- $T = 90$; $T_F = 360$;

Resultados: Mosquitos no ponto 155

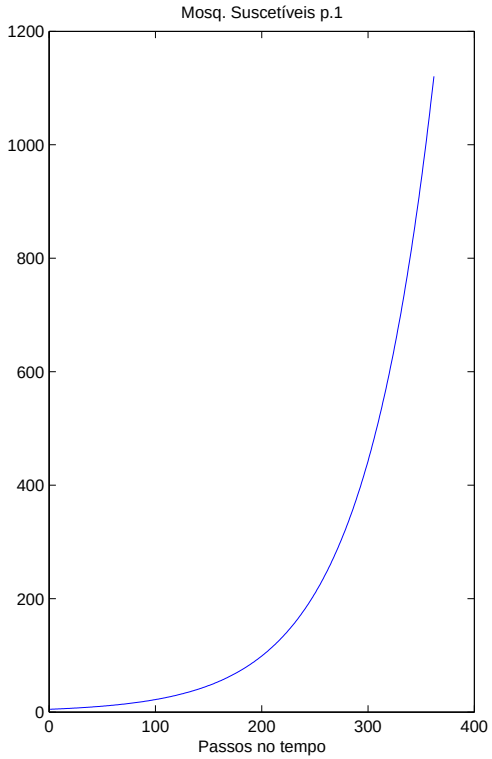


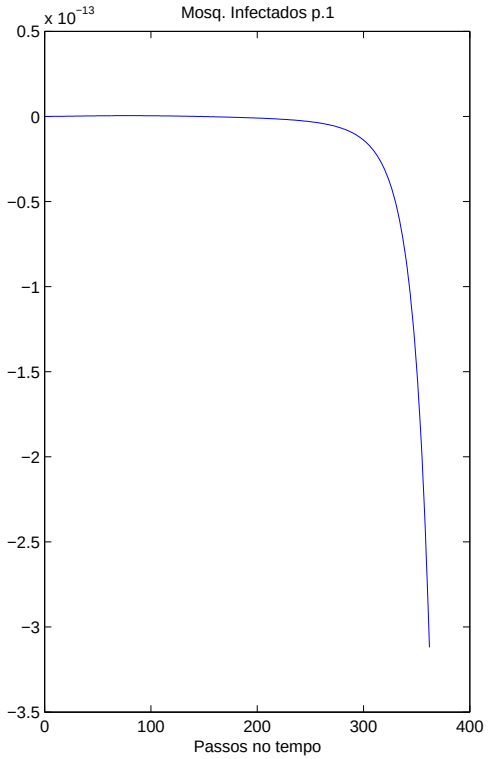


Resultados: Humanos no ponto 155

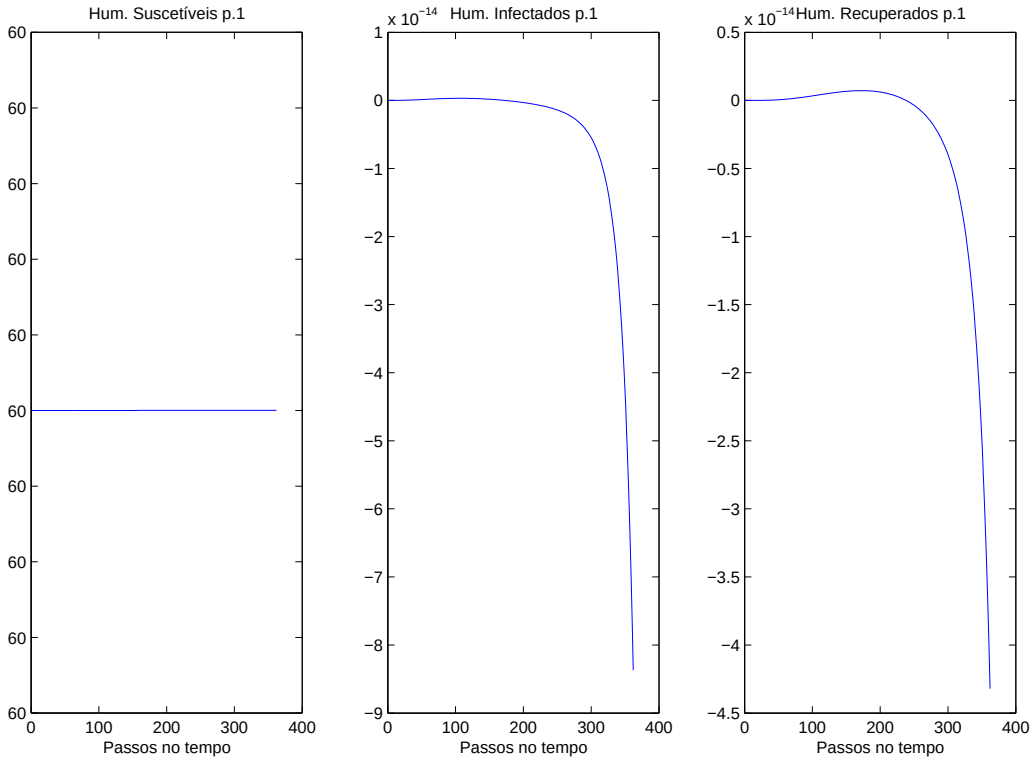


Resultados: Mosquitos no ponto 1

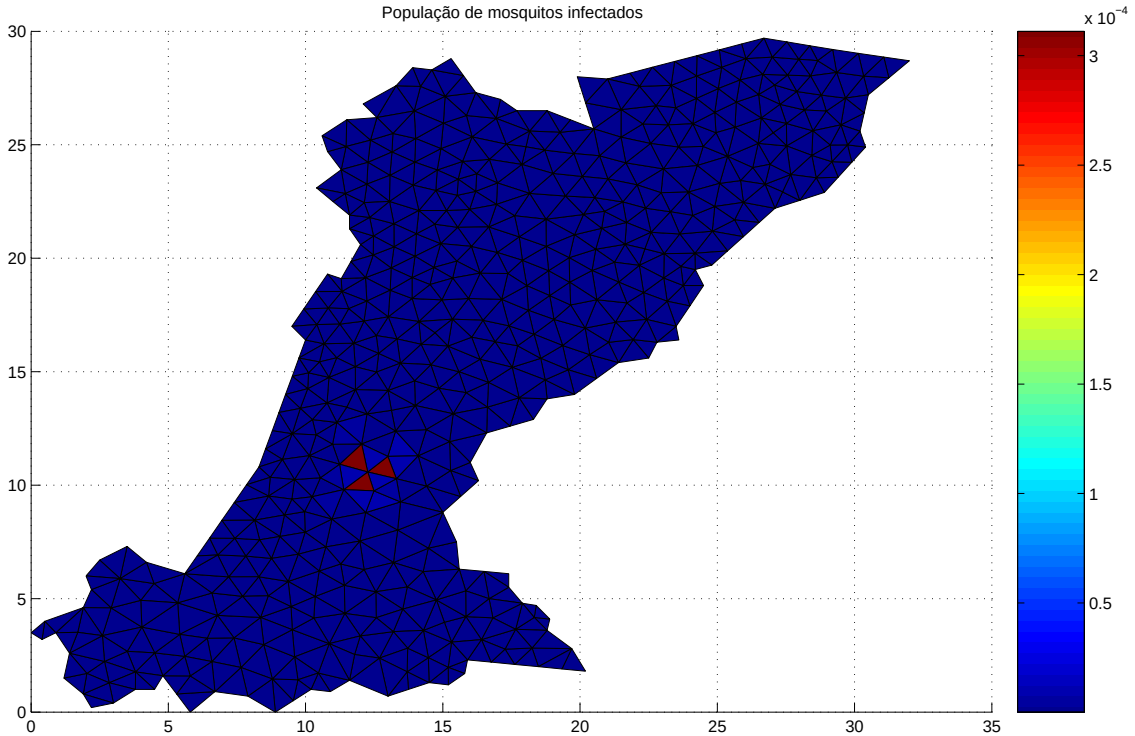




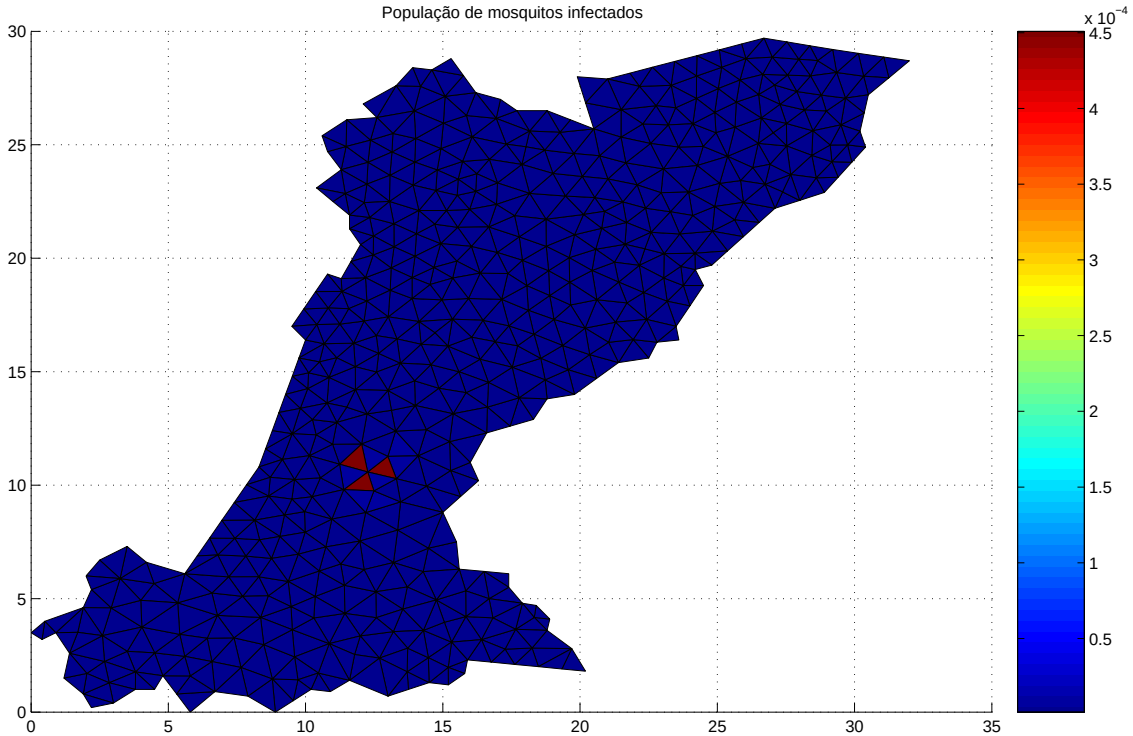
Resultados: Humanos no ponto 1



Resultados: Mosquitos infectados no tempo final



Resultados: Humanos infectados no tempo final



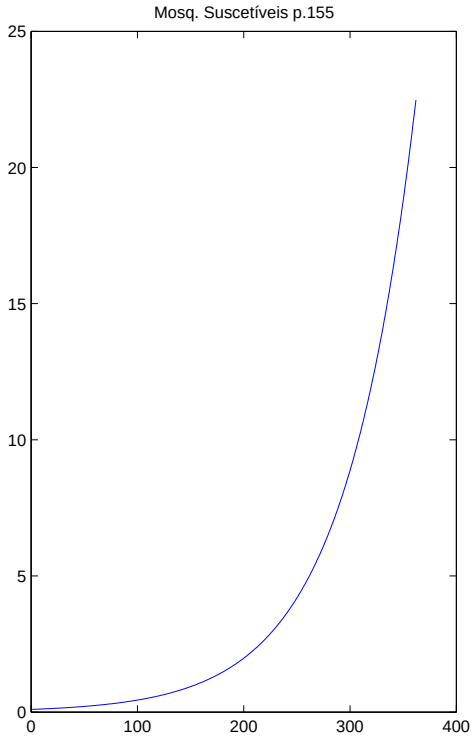
Condições iniciais

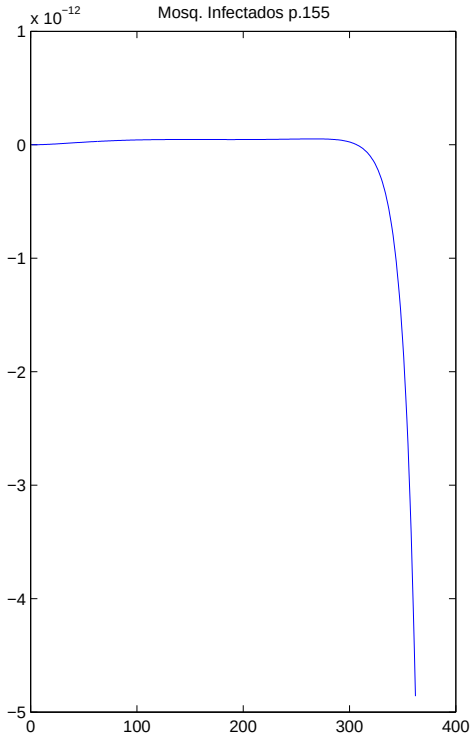
- A densidade de mosquitos suscetíveis é constante ($M_S = 0.1$) ao longo da malha, exceto quando $x^2 + y^2 < 25$ ($M_S = 5$).
- A densidade de mosquitos infectados é constante ($M_I = 0$) ao longo da malha.
- A densidade de humanos suscetíveis é constante ($S = 60$) ao longo da malha.
- A densidade de humanos infectados é constante ($I = 0$) ao longo da malha, exceto no ponto 1 ($I = 1$).
- A densidade de humanos recuperados é constante ($R = 0$) ao longo da malha.

Parâmetros

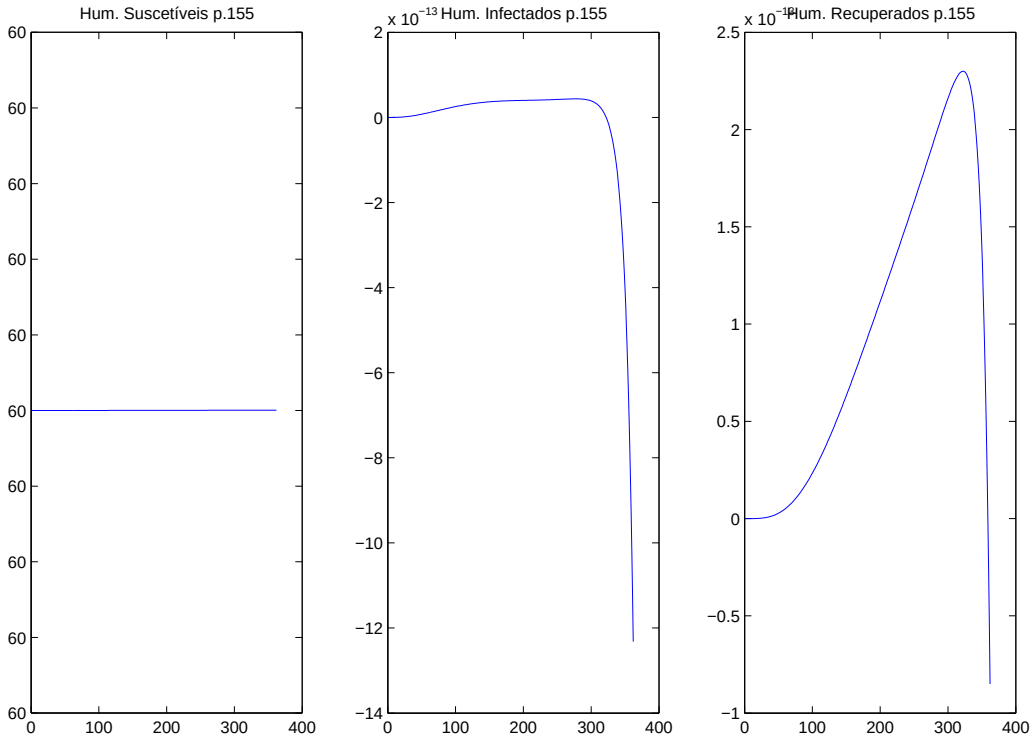
- $\alpha_M = 0.0001$ e, para os humanos, $\alpha = 0$;
- $m = 0.04$; $n = 0.1$;
- $\beta = 0.0015$; $\rho = 0.001$; $\sigma = 0.1$;
- $T = 90$; $T_F = 360$;

Resultados: Mosquitos no ponto 155

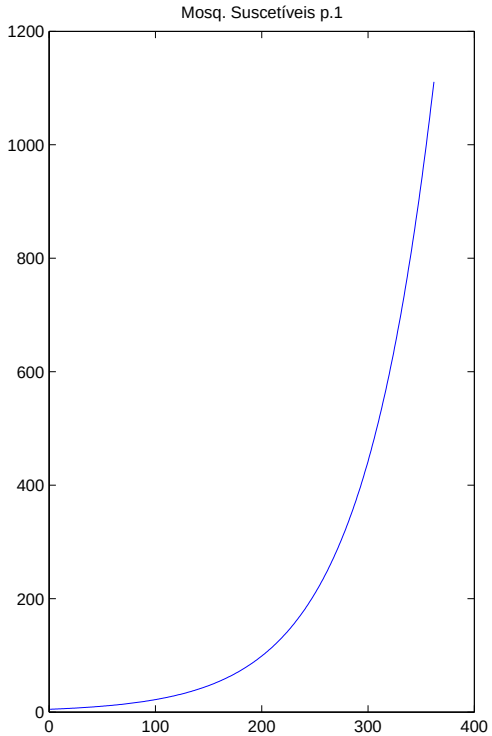


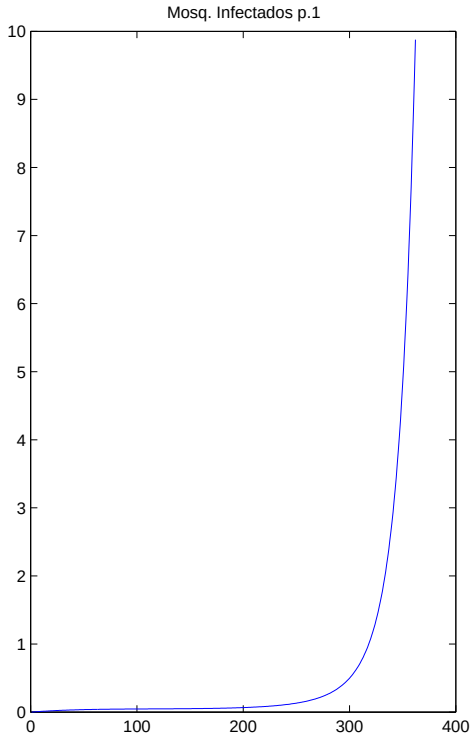


Resultados: Humanos no ponto 155

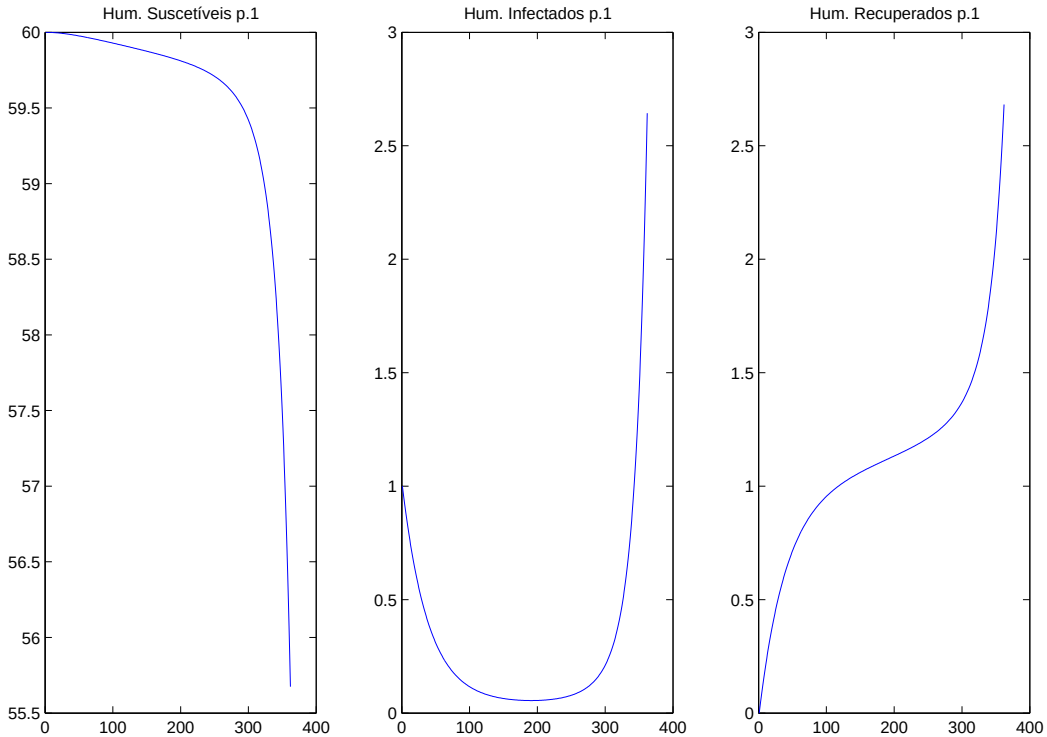


Resultados: Mosquitos no ponto 1

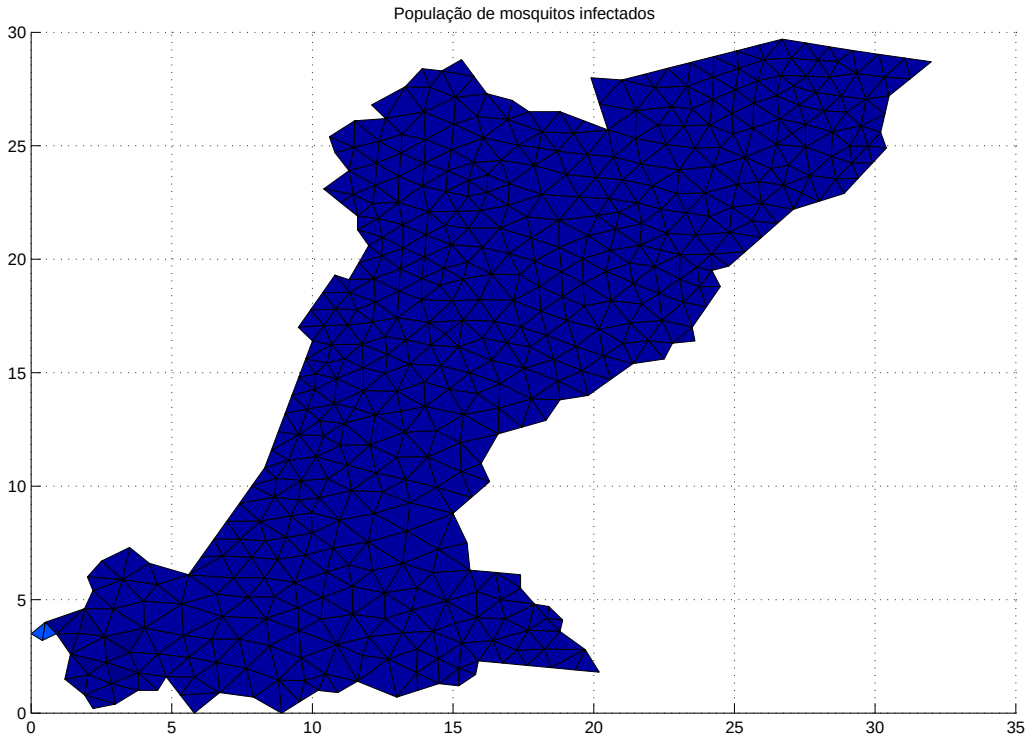
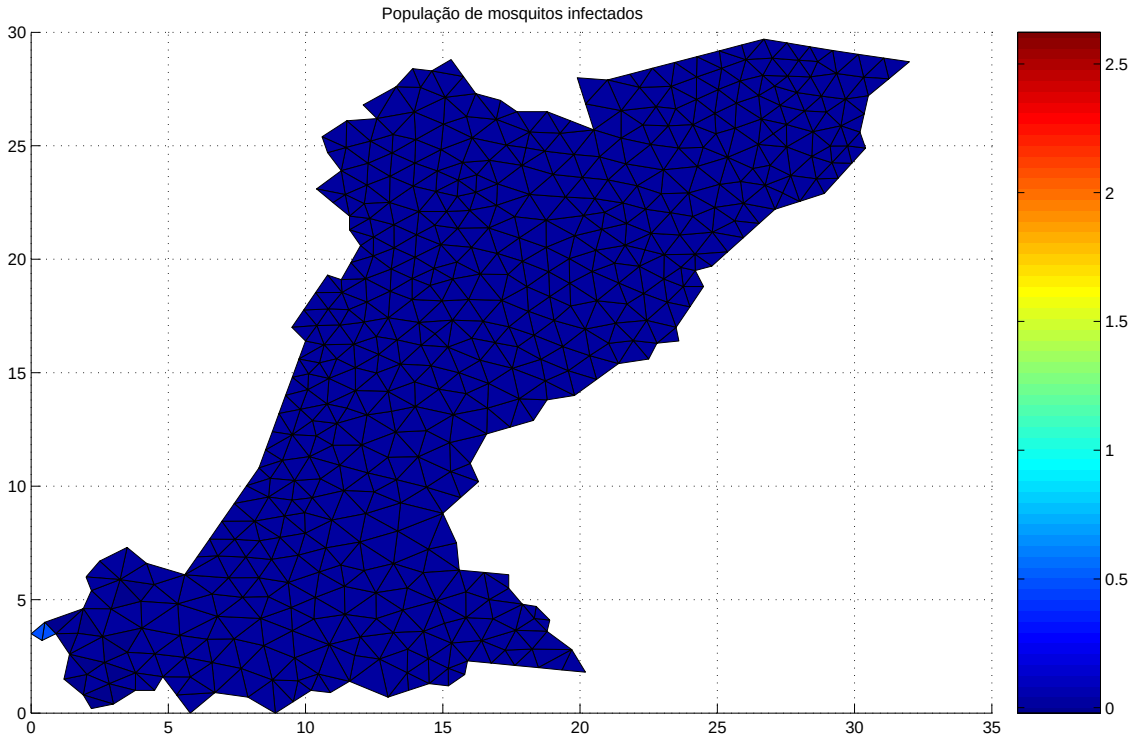




Resultados: Humanos no ponto 1



Resultados: Mosquitos infectados no tempo final



Resultados: Humanos infectados no tempo final