

Estrutura de covariância de modelos espaciais para dados de áreas

Elias T. Krainski, Renato M. Assunção
Paulo Justiniano Ribeiro Jr. e Guido Del Pino

31 de julho de 2008

Variação espacial discreta

Mapa de 48 estados dos EUA



- ▶ seja o vetor aleatório $\mathbf{y}$
 - ▶ y_i é o valor observado na área i

- ▶ seja o vetor aleatório $\mathbf{y}$
 - ▶ y_i é o valor observado na área i
- ▶ áreas vizinhas podem ser parecidas, como modelar $\mathbf{y}$?

- ▶ seja o vetor aleatório $\mathbf{y}$
 - ▶ y_i é o valor observado na área i
- ▶ áreas vizinhas podem ser parecidas, como modelar $\mathbf{y}$?
- ▶ devemos considerar a estrutura de dependência entre vizinhos

- ▶ seja o vetor aleatório $\mathbf{y}$
 - ▶ y_i é o valor observado na área i
- ▶ áreas vizinhas podem ser parecidas, como modelar $\mathbf{y}$?
- ▶ devemos considerar a estrutura de dependência entre vizinhos
 - ▶ função de correlação
 - ▶ autoregressão
 - ▶ efeito aleatório espacialmente estruturado

Dois modelos autoregressivos

Dois modelos autoregressivos

- ▶ modelo **SAR**

Dois modelos autoregressivos

- ▶ modelo **SAR**
 - ▶ **AutoRegressivo**: valor da área i depende de seus vizinhos

Dois modelos autoregressivos

- ▶ modelo **SAR**
 - ▶ **AutoRegressivo**: valor da área i depende de seus vizinhos
 - ▶ **Simultâneo**: sistema de n equações simultâneas

Dois modelos autoregressivos

- ▶ modelo **SAR**
 - ▶ **AutoRegressivo**: valor da área i depende de seus vizinhos
 - ▶ **Simultâneo**: sistema de n equações simultâneas
- ▶ modelo **CAR**

Dois modelos autoregressivos

- ▶ modelo **SAR**
 - ▶ **AutoRegressivo**: valor da área i depende de seus vizinhos
 - ▶ **Simultâneo**: sistema de n equações simultâneas
- ▶ modelo **CAR**
 - ▶ **AutoRegressivo**: como antes

Dois modelos autoregressivos

- ▶ modelo **SAR**
 - ▶ **AutoRegressivo**: valor da área i depende de seus vizinhos
 - ▶ **Simultâneo**: sistema de n equações simultâneas
- ▶ modelo **CAR**
 - ▶ **AutoRegressivo**: como antes
 - ▶ **Condicional**: sistema de n distribuições condicionais

Especificações

► modelo **SAR**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & \rho_s \sum_{j \text{ viz } 1} w_{ij} y_j + \epsilon_1 \\ y_2 & = & \rho_s \sum_{j \text{ viz } 2} w_{ij} y_j + \epsilon_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n & = & \rho_s \sum_{j \text{ viz } n} w_{ij} y_j + \epsilon_n \end{array} \right. \quad (1)$$

Especificações

► modelo **SAR**

$$\begin{cases} y_1 &= \rho_s \sum_{j \text{ viz } 1} w_{ij} y_j + \epsilon_1 \\ y_2 &= \rho_s \sum_{j \text{ viz } 2} w_{ij} y_j + \epsilon_2 \\ \vdots &= \vdots \\ y_n &= \rho_s \sum_{j \text{ viz } n} w_{ij} y_j + \epsilon_n \end{cases} \quad (1)$$

► modelo **CAR**

$$\begin{cases} y_1 | \text{viz de } 1 &\sim N(\rho_c \sum_{j \text{ viz } 1} w_{ij} y_j, v_1) \\ y_2 | \text{viz de } 2 &\sim N(\rho_c \sum_{j \text{ viz } 2} w_{ij} y_j, v_2) \\ \vdots &= \vdots \\ y_n | \text{viz de } n &\sim N(\rho_c \sum_{j \text{ viz } n} w_{ij} y_j, v_n) \end{cases} \quad (2)$$

Especificações

► modelo **SAR**

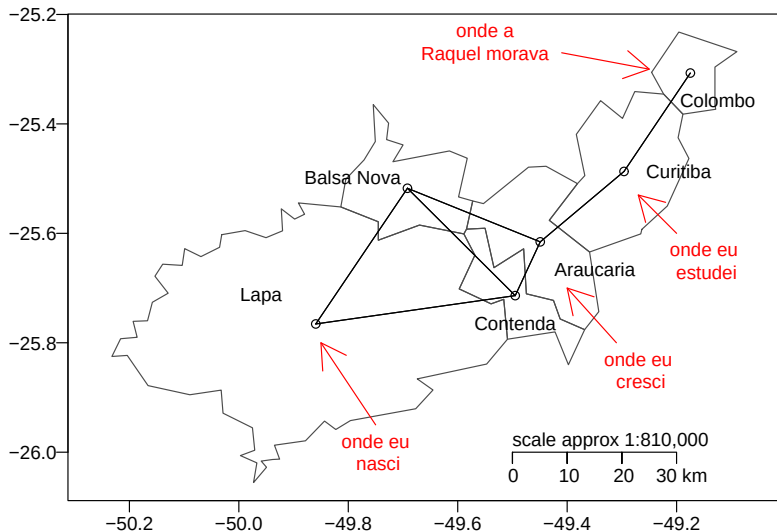
$$\begin{cases} y_1 &= \rho_s \sum_{j \text{ viz } 1} w_{ij} y_j + \epsilon_1 \\ y_2 &= \rho_s \sum_{j \text{ viz } 2} w_{ij} y_j + \epsilon_2 \\ \vdots &= \vdots \\ y_n &= \rho_s \sum_{j \text{ viz } n} w_{ij} y_j + \epsilon_n \end{cases} \quad (1)$$

► modelo **CAR**

$$\begin{cases} y_1 | \text{viz de } 1 &\sim N(\rho_c \sum_{j \text{ viz } 1} w_{ij} y_j, v_1) \\ y_2 | \text{viz de } 2 &\sim N(\rho_c \sum_{j \text{ viz } 2} w_{ij} y_j, v_2) \\ \vdots &= \vdots \\ y_n | \text{viz de } n &\sim N(\rho_c \sum_{j \text{ viz } n} w_{ij} y_j, v_n) \end{cases} \quad (2)$$

► o que é w_{ij} ?

Exemplo de grafo



Definição de W

- ▶ matriz de vizinhança

Lapa	0	1	1	0	0	0
Balsa Nova	1	0	1	1	0	0
Contenda	1	1	0	1	0	0
Araucária	0	1	1	0	1	0
Curitiba	0	0	0	1	0	1
Colombo	0	0	0	0	1	0

Definição de W

- ▶ matriz de vizinhança

Lapa	0	1	1	0	0	0
Balsa Nova	1	0	1	1	0	0
Contenda	1	1	0	1	0	0
Araucária	0	1	1	0	1	0
Curitiba	0	0	0	1	0	1
Colombo	0	0	0	0	1	0

- ▶ matriz W

Lapa	0.00	0.50	0.50	0.00	0.00	0.00
Balsa Nova	0.33	0.00	0.33	0.33	0.00	0.00
Contenda	0.33	0.33	0.00	0.33	0.00	0.00
Araucária	0.00	0.33	0.33	0.00	0.33	0.00
Curitiba	0.00	0.00	0.00	0.50	0.00	0.50
Colombo	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00

Forma matricial

- ▶ modelo **SAR**:

$$Y_{n \times 1} = \rho_s \mathbf{W}_{n \times n} Y + \epsilon, \quad (3)$$

$$\epsilon_j \sim N(0, \sigma_j^2)$$

Forma matricial

- ▶ modelo **SAR**:

$$Y_{n \times 1} = \rho_s \mathbf{W}_{n \times n} Y + \epsilon, \quad (3)$$

$$\epsilon_j \sim N(0, \sigma_j^2)$$

- ▶ modelo **CAR**: Não é possível escrever como um sistema de equações lineares

Distribuição conjunta

- ▶ modelo **SAR**:

$$Y \sim N(0, (I - \rho_S \mathbf{W})^{-1} \mathbf{S} (I - \rho_S \mathbf{W})^{-1'}) \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \sigma^2 \text{diag}(1/d_1, \dots, 1/d_n)$$

Distribuição conjunta

- ▶ modelo **SAR**:

$$Y \sim N(0, (\mathbf{I} - \rho_S \mathbf{W})^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{I} - \rho_S \mathbf{W})^{-1'}) \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \sigma^2 \text{diag}(1/d_1, \dots, 1/d_n)$$

- ▶ modelo **CAR**:

$$Y \sim N(0, [\mathbf{T}(\mathbf{I} - \rho_C \mathbf{W})]^{-1}) \quad (5)$$

$$\mathbf{T} = \tau \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

Correlações implicadas

- ▶ W tem uma estrutura espacial intuitiva e simples

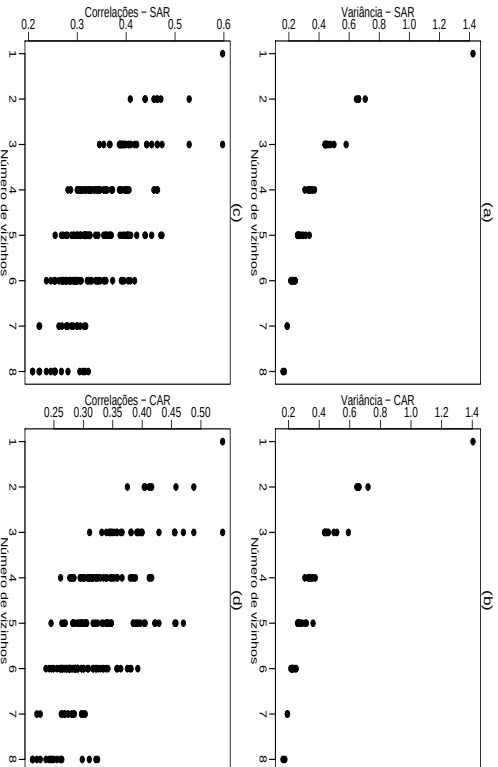
Correlações implicadas

- ▶ $\mathbf{W}$ tem uma estrutura espacial intuitiva e simples
- ▶ e $\text{Corr}(y_i, y_j)$ dos modelos **SAR** e **CAR** tem?
 - ▶ SAR: $[(\mathbf{I} - \rho_s \mathbf{W})^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1'}]_{ij}$
 - ▶ CAR: $[(\mathbf{T} (\mathbf{I} - \rho_c \mathbf{W}))^{-1}]_{ij}$

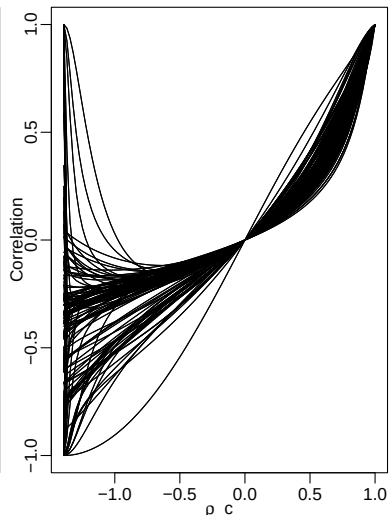
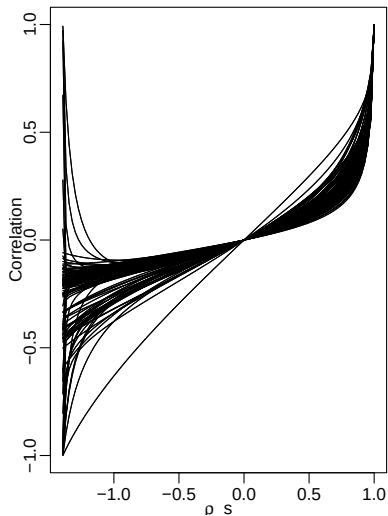
Correlações implicadas

- ▶ $\mathbf{W}$ tem uma estrutura espacial intuitiva e simples
- ▶ e $\text{Corr}(y_i, y_j)$ dos modelos **SAR** e **CAR** tem?
 - ▶ SAR: $[(\mathbf{I} - \rho_s \mathbf{W})^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1'}]_{ij}$
 - ▶ CAR: $[\mathbf{T} (\mathbf{I} - \rho_c \mathbf{W})]^{-1}]_{ij}$
- ▶ mais especificamente, se $i \sim j$
 - ▶ há uma estrutura intuitiva?
 - ▶ e se variamos ρ_c ou ρ_s ?

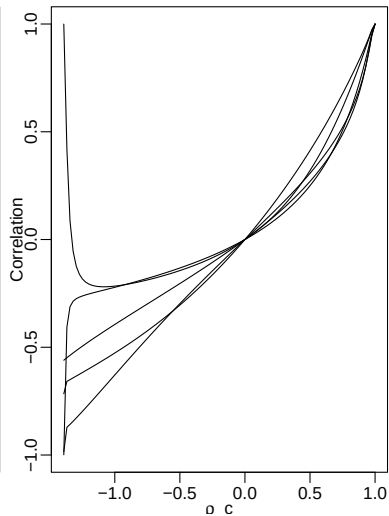
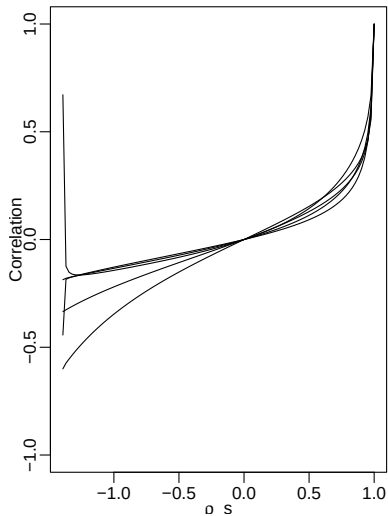
Correlações entre vizinhos por número de vizinhos



Correlações entre vizinhos: CAR (esquerda) e SAR (direita)



Alguns vizinhos: CAR (esquerda) e SAR (direita)



$Cor(y_i, y_j)$ e ρ (ρ_s ou ρ_c)

- ▶ $\rho > 0$
 - ▶ $Corr(y_i, y_j)$ cresce se ρ cresce
 - ▶ $Corr(y_i, y_j)$ não tem posto constante a medida que $|\rho|$ cresce

$Cor(y_i, y_j)$ e ρ (ρ_s ou ρ_c)

- ▶ $\rho > 0$
 - ▶ $Corr(y_i, y_j)$ cresce se ρ cresce
 - ▶ $Corr(y_i, y_j)$ não tem posto constante a medida que $|\rho|$ cresce
- ▶ $\rho < 0$
 - ▶ alguns pares de $Corr(y_i, y_j)$ ficam > 0
 - ▶ $Corr(y_i, y_j)$ pode tender a $+1$ se ρ fica muito negativo!

Modelo bayesiano

- ▶ suponha agora que consideramos um modelo espacial Bayesiano

Modelo bayesiano

- ▶ suponha agora que consideramos um modelo espacial Bayesiano
- ▶ verossimilhança

$$\mathbf{y}|\mathbf{b}, \tau_y \sim MVN(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}, \tau_y^{-1}\mathbf{I})$$

Modelo bayesiano

- ▶ suponha agora que consideramos um modelo espacial Bayesiano
- ▶ verossimilhança

$$\mathbf{y}|\mathbf{b}, \tau_y \sim MVN(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}, \tau_y^{-1}\mathbf{I})$$

- ▶ prioris
 - ▶ $\boldsymbol{\beta}$ - Normal multivariada

$$\boldsymbol{\beta} \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m})' \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}) \right\}$$

- ▶ **$\mathbf{b}$ - CAR**

$$\mathbf{b} \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}\mathbf{b}' \boldsymbol{\tau}(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{b} \right\}$$

- ▶ $\tau_y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ e $\tau_b \sim \text{gamma}(a, b)$

Posterioris



$$\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \mathbf{b}, \tau_y, \mathbf{m}, \mathbf{V} \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}^*)' (\mathbf{V}^{-1} + \tau_y \mathbf{X}' \mathbf{X}) (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}^*)] \right\}$$

$$\mathbf{m}^* = (\mathbf{V}^{-1} + \tau_y \mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} + \tau_y \mathbf{X}' (\mathbf{y} - \mathbf{b})]$$

Posterioris



$$\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \mathbf{b}, \tau_y, \mathbf{m}, \mathbf{V} \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}^*)' (\mathbf{V}^{-1} + \tau_y \mathbf{X}' \mathbf{X}) (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}^*)] \right\}$$

$$\mathbf{m}^* = (\mathbf{V}^{-1} + \tau_y \mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} + \tau_y \mathbf{X}' (\mathbf{y} - \mathbf{b})]$$



$\tau_y | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}, \alpha, \beta$ é

$$\text{Gamma}(\alpha + n/2, \beta + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}))' (\mathbf{y} - (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}))).$$

Posterioris



$$\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \mathbf{b}, \tau_y, \mathbf{m}, \mathbf{V} \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}^*)' (\mathbf{V}^{-1} + \tau_y \mathbf{X}' \mathbf{X}) (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{m}^*)] \right\}$$

$$\mathbf{m}^* = (\mathbf{V}^{-1} + \tau_y \mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} + \tau_y \mathbf{X}' (\mathbf{y} - \mathbf{b})]$$



$\tau_y | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}, \alpha, \beta$ é

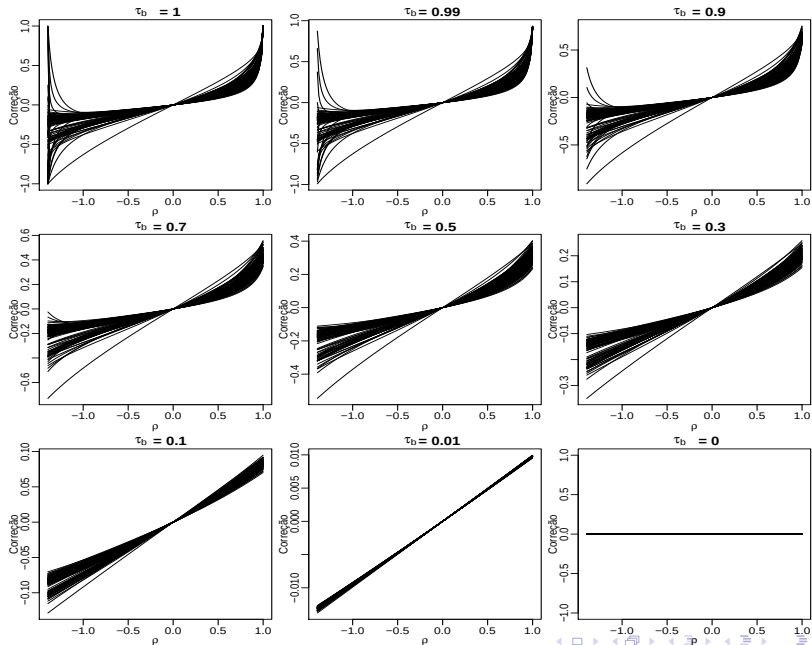
$\text{Gamma}(\alpha + n/2, \beta + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}))'(\mathbf{y} - (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{b})))$.



$$\mathbf{b} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \tau_y, \tau_b, \rho \sim \text{MVN} \left(\tau_y \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \mathbf{C}^{-1} \right), \quad (6)$$

$\mathbf{C} = [\tau_y \mathbf{I} + \mathbf{T}(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})]$ é a soma das precisões, de $\mathbf{y}$ e de $\mathbf{b}$ a priori.

C^{-1} (vizinhos), variando ρ , τ_y e τ_b



A matriz $\mathbf{W}$

- ▶ temos

- ▶ SAR: $(\mathbf{I} - \rho_s \mathbf{W})^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1'}$
- ▶ CAR: $[\mathbf{T}(\mathbf{I} - \rho_c \mathbf{W})]^{-1}$

A matriz $\mathbf{W}$

- ▶ temos
 - ▶ SAR: $(\mathbf{I} - \rho_s \mathbf{W})^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1'}$
 - ▶ CAR: $[\mathbf{T} (\mathbf{I} - \rho_c \mathbf{W})]^{-1}$
- ▶ $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ são diagonais, $\mathbf{W}$ é o elemento chave
- ▶ $\mathbf{W}$ é uma matriz estocástica
- ▶ $\mathbf{W}^k$ converge

A matriz $\mathbf{W}^*$

► temos $\mathbf{C}^{-1} = [\tau_y \mathbf{I} + \mathbf{T}(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})]^{-1}$

A matriz $\mathbf{W}^*$

- ▶ temos $\mathbf{C}^{-1} = [\tau_y \mathbf{I} + \mathbf{T}(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})]^{-1}$
- ▶ seja $\mathbf{T}^*$ diagonal com $T_{ii}^* = \frac{d_i \tau_b}{\tau_y + d_i \tau_b}$
- ▶ seja $\mathbf{W}^* = \mathbf{T}^* \mathbf{W}$
- ▶ então $\mathbf{C}^{-1} = [(\tau_y \mathbf{I} + \mathbf{T})(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}^*)]^{-1}$

A matriz $\mathbf{W}^*$

- ▶ temos $\mathbf{C}^{-1} = [\tau_y \mathbf{I} + \mathbf{T}(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})]^{-1}$
- ▶ seja $\mathbf{T}^*$ diagonal com $T_{ii}^* = \frac{d_i \tau_b}{\tau_y + d_i \tau_b}$
- ▶ seja $\mathbf{W}^* = \mathbf{T}^* \mathbf{W}$
- ▶ então $\mathbf{C}^{-1} = [(\tau_y \mathbf{I} + \mathbf{T})(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}^*)]^{-1}$
- ▶ $(\tau_y \mathbf{I} + \mathbf{T})$ é diagonal
- ▶ $\mathbf{W}^*$ é o elemento chave

Expansão

- ▶ seja uma matriz $\mathbf{M}$, tal que, $(\mathbf{M}^k)_{ij} \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$, então

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 + \dots \quad (7)$$

Expansão

- ▶ seja uma matriz $\mathbf{M}$, tal que, $(\mathbf{M}^k)_{ij} \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$, então

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 + \dots \quad (7)$$

- ▶ $[\mathbf{W}^k]_{ij} \rightarrow d_i / \sum_j d_j$
 - ▶ portanto $(\rho \mathbf{W})^k \rightarrow 0$ se $|\rho| < 1$

Expansão

- ▶ seja uma matriz $\mathbf{M}$, tal que, $(\mathbf{M}^k)_{ij} \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$, então

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 + \dots \quad (7)$$

- ▶ $[\mathbf{W}^k]_{ij} \rightarrow d_i / \sum_j d_j$
 - ▶ portanto $(\rho \mathbf{W})^k \rightarrow 0$ se $|\rho| < 1$
- ▶ $[(\mathbf{W}^*)^k] \rightarrow 0$ se $|\rho| \mathbf{T}^* < 1$

Expansão

- ▶ seja uma matriz $\mathbf{M}$, tal que, $(\mathbf{M}^k)_{ij} \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$, então

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 + \dots \quad (7)$$

- ▶ $[\mathbf{W}^k]_{ij} \rightarrow d_i / \sum_j d_j$
 - ▶ portanto $(\rho \mathbf{W})^k \rightarrow 0$ se $|\rho| < 1$
- ▶ $[(\mathbf{W}^*)^k] \rightarrow 0$ se $|\rho| \mathbf{T}^* < 1$
- ▶ então

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1} &= \mathbf{I} + \rho \mathbf{W} + \rho^2 \mathbf{W}^2 + \dots \\ &\approx \mathbf{I} + \rho \mathbf{W} + \rho^2 \mathbf{W}^2 + \dots + \rho^p \mathbf{W}^p \end{aligned} \quad (8)$$

Expansão

- ▶ seja uma matriz $\mathbf{M}$, tal que, $(\mathbf{M}^k)_{ij} \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$, então

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 + \dots \quad (7)$$

- ▶ $[\mathbf{W}^k]_{ij} \rightarrow d_i / \sum_j d_j$
 - ▶ portanto $(\rho \mathbf{W})^k \rightarrow 0$ se $|\rho| < 1$
- ▶ $[(\mathbf{W}^*)^k] \rightarrow 0$ se $|\rho| \mathbf{T}^* < 1$
- ▶ então

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1} &= \mathbf{I} + \rho \mathbf{W} + \rho^2 \mathbf{W}^2 + \dots \\ &\approx \mathbf{I} + \rho \mathbf{W} + \rho^2 \mathbf{W}^2 + \dots + \rho^p \mathbf{W}^p \end{aligned} \quad (8)$$

- ▶ e

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}^*)^{-1} &= \mathbf{I} + \rho \mathbf{W}^* + \rho^2 \mathbf{W}^{*2} + \dots \\ &\approx \mathbf{I} + \rho \mathbf{W}^* + \rho^2 \mathbf{W}^{*2} + \dots + \rho^p \mathbf{W}^{*p} \end{aligned} \quad (9)$$

Interpretação da covariância

- ▶ elementos de $\mathbf{W}^k$

$$[\mathbf{W}^k]_{ij} = \frac{\# \text{ caminhos tamanho } k \text{ de } i \text{ para } j}{\prod \# \text{ caminhos alternativos a cada passo}}$$

Interpretação da covariância

- ▶ elementos de $\mathbf{W}^k$

$$[\mathbf{W}^k]_{ij} = \frac{\# \text{ caminhos tamanho } k \text{ de } i \text{ para } j}{\prod \# \text{ caminhos alternativos a cada passo}}$$

- ▶ aproximação CAR:

$$\text{Cov}(y_i, y_j) \approx \frac{\tau}{d_j} \left(\frac{\rho a_{ij}}{d_i} + \frac{\rho^2}{d_i} \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik} a_{kj}}{d_k} + \frac{\rho^3}{d_i} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik} a_{kl} a_{lj}}{d_l d_k} \right)$$

Interpretação da covariância

- ▶ elementos de $\mathbf{W}^k$

$$[\mathbf{W}^k]_{ij} = \frac{\# \text{ caminhos tamanho } k \text{ de } i \text{ para } j}{\prod \# \text{ caminhos alternativos a cada passo}}$$

- ▶ aproximação CAR:

$$\text{Cov}(y_i, y_j) \approx \frac{\tau}{d_j} \left(\frac{\rho a_{ij}}{d_i} + \frac{\rho^2}{d_i} \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik} a_{kj}}{d_k} + \frac{\rho^3}{d_i} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik} a_{kl} a_{lj}}{d_l d_k} \right)$$

- ▶ SAR:

$$\frac{\sigma^2}{d_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\rho^n \sum_{k=0}^n (\mathbf{W}^k)_{ij} (\mathbf{W}^{n-k})_{ji} \right]$$

Covariância a posteriori

- ▶ elementos de $\mathbf{W}^{*k}$

$$[(\mathbf{W}^*)^k]_{ij} = \frac{\tau_b^k}{\tau_y + d_i \tau_b} \times \frac{\# \text{ caminhos tamanho } k \text{ de } i \text{ para } j}{\prod (\tau_y + \# \text{ alternativas a cada passo} \times \tau_b)}$$

Covariância a posteriori

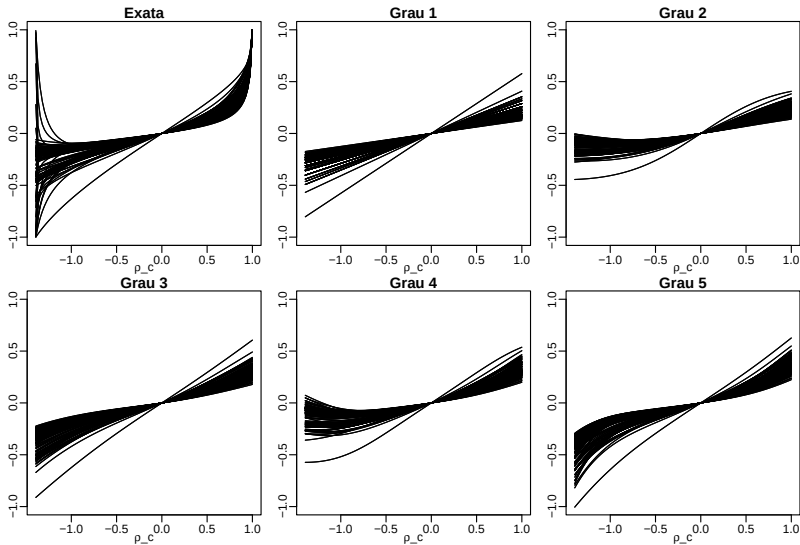
- ▶ elementos de $\mathbf{W}^{*k}$

$$[(\mathbf{W}^*)^k]_{ij} = \frac{\tau_b^k}{\tau_y + d_i \tau_b} \times \frac{\# \text{ caminhos tamanho } k \text{ de } i \text{ para } j}{\prod (\tau_y + \# \text{ alternativas a cada passo} \times \tau_b)}$$

- ▶ aproximação de ordem 2, temos $\text{Cov}(\mu_i, \mu_j | \mathbf{y}, \tau_y, \tau_b, \rho)$

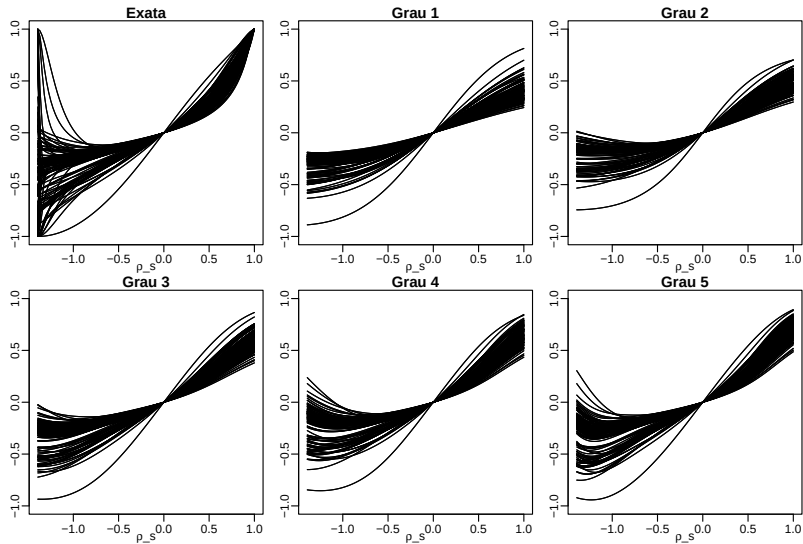
$$\approx \begin{cases} \frac{1}{\tau_y + d_i \tau_b} \left[1 + \frac{\rho^2 \tau_b^2}{\tau_y + d_i \tau_b} \sum_{r=0}^n \frac{a_{ir} a_{rj}}{(\tau_y + d_r \tau_b)} \right] & \text{se } i = j \\ \frac{\rho \tau_b}{(\tau_y + d_i \tau_b)(\tau_y + d_j \tau_b)} \left[1 + \rho \tau_b \sum_{r=0}^n \frac{a_{ir} a_{rj}}{(\tau_y + d_r \tau_b)} \right] & \text{se } i \sim j \\ \frac{\rho^2 \tau_b^2}{(\tau_y + d_j \tau_b)(\tau_y + d_i \tau_b)} \sum_{r=0}^n \frac{a_{ir} a_{rj}}{(\tau_y + d_r \tau_b)} & \text{c.c.} \end{cases} \quad (10)$$

Correlações entre vizinhos - CAR



ordem 1 é linear, pois $(I - \rho_c W)^{-1} \approx I + \rho_c W$.

Correlações entre vizinhos - SAR



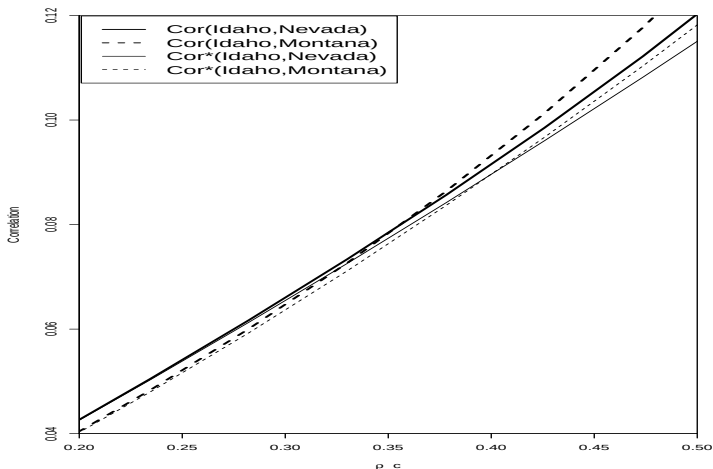
para SAR a aproximação é melhor

Dois pares de estados

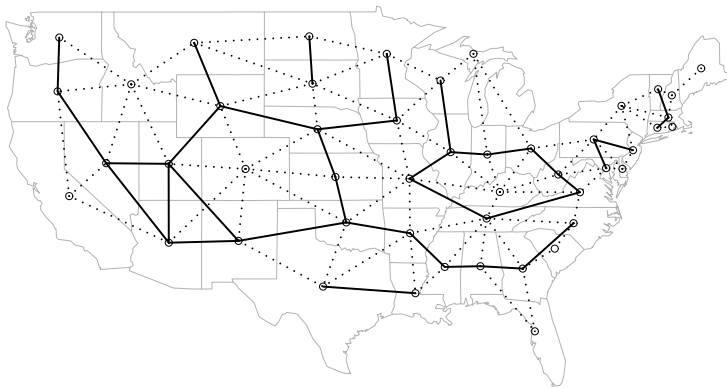


Efeito de vizinhança longínquas

- ▶ (Idaho,Nevada): $0.0167 * \rho + 0.0169 * \rho^2 + 0.0170 * \rho^3$
- ▶ (Idaho,Montana): $0.0167 * \rho + 0.0173 * \rho^2 + 0.0174 * \rho^3$



ρ próximo do limite inferior



Convergência de $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}^*$

- ▶ se $\mathbf{M}$ converge, a razão λ_2/λ_1 está associada a velocidade de convergencia

Convergência de W e W^*

- ▶ se M converge, a razão λ_2/λ_1 está associada a velocidade de convergência
- ▶ W e W^* convergem

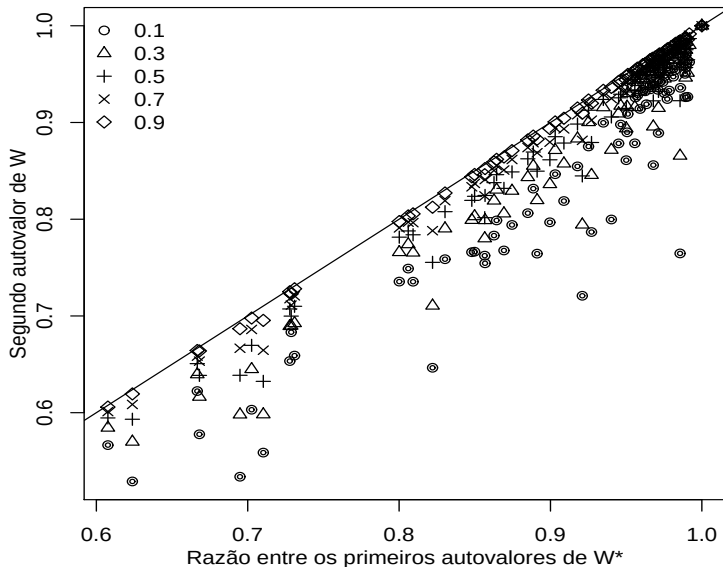
Convergência de $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}^*$

- ▶ se $\mathbf{M}$ converge, a razão λ_2/λ_1 está associada a velocidade de convergencia
- ▶ $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}^*$ convergem
- ▶ se $\mathbf{W}$ converge rapidamente, $\mathbf{W}^*$ também

Convergência de $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}^*$

- ▶ se $\mathbf{M}$ converge, a razão λ_2/λ_1 está associada a velocidade de convergencia
- ▶ $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}^*$ convergem
- ▶ se $\mathbf{W}$ converge rapidamente, $\mathbf{W}^*$ também
- ▶ a convergência rápida indica menos influência dos vizinhos longinquos na correlação entre vizinhos

Segundo autovalor de W e λ_2/λ_1 de W^*



Conclusões

- ▶ obtemos uma expressão simples para a covariância
- ▶ essa expressão ajuda a entender a estrutura de covariância

Conclusões

- ▶ obtemos uma expressão simples para a covariância
- ▶ essa expressão ajuda a entender a estrutura de covariância
- ▶ conectividade menor implica
 - ▶ W mais esparsa
 - ▶ λ_2 maior
 - ▶ conclusão: necessidade de vizinhança longínqua

Conclusões

- ▶ obtemos uma expressão simples para a covariância
- ▶ essa expressão ajuda a entender a estrutura de covariância
- ▶ conectividade menor implica
 - ▶ W mais esparsa
 - ▶ λ_2 maior
 - ▶ conclusão: necessidade de vizinhança longínqua
- ▶ área mais subdividida implica λ_2 maior
 - ▶ conclusão: necessidade de vizinhança longínqua

Conclusões

- ▶ obtemos uma expressão simples para a covariância
- ▶ essa expressão ajuda a entender a estrutura de covariância
- ▶ conectividade menor implica
 - ▶ W mais esparsa
 - ▶ λ_2 maior
 - ▶ conclusão: necessidade de vizinhança longínqua
- ▶ área mais subdividida implica λ_2 maior
 - ▶ conclusão: necessidade de vizinhança longínqua
- ▶ efeito da priori versus verossimilhança
 - ▶ τ_b maior implica resultados não intuitivos